Einstein の総和規約について

飯盛浩司

2019 年 9 月 5 日

1　ベクトルの内積と Einstein の総和規約

ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ に対して、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \sum_{i=1}^{d} a_i b_i \tag{1}$$

を内積 (inner product) という。次元 d が前後の文脈などから明らかなときには (1) に現れる $\sum_{i=1}^{d}$ は省略しても差し支えないように思える。そこで、以降、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i \tag{2}$$

と書くことにする。つまり、同じ項において添え字が二度現れる場合には、その添字について和をとると約束する。このように重なった添字をダミーインデックスと呼ぶ (なお、同じ項で一度しか現れない添字はフリーインデックスと呼ぶ)。このような記法は Einstein が初めて用いたことから、Einstein の総和規約などと呼ばれる。なお、ダミーインデックスに i を選ぶことは本質的ではなく、$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_j b_j = a_\ell b_\ell$ などと書いても良い。ただし、同じ項において同じ添字が 3 度以上現れてはいけない。

2　Kronecker のデルタと交代記号

ここで、2 つの記号を導入する。1 つめは Kronecker のデルタであり、

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

と定義される (ここに $1 \leq i, j \leq d$)。

問: δ_{ii} の値は?

答: 前節で導入した Einstein の総和規約のため、

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{d} \delta_{ii} = d \tag{4}$$

である。$\delta_{ii} = 1$ としないように気をつけよう。

---

2 つめは交代記号と呼ばれ、

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 \ \ \text{if} \ \ (i,j,k) = (1,2,3) \ \ \text{or} \ \ (2,3,1) \ \ \text{or} \ \ (3,1,2) \\ -1 \ \ \text{if} \ \ (i,j,k) = (2,1,3) \ \ \text{or} \ \ (3,2,1) \ \ \text{or} \ \ (1,3,2) \\ 0 \ \ \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

と定義される。

交代記号を使うと、$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の外積の第 i 成分は以下のように簡単に表現できる。

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = e_{ijk} a_j b_k \tag{6}$$

ここで、i はフリーインデックス、j, k はダミーインデックスであることに注意すれば上の式が外積を表すことは明らかであろう。分からなければ、例えば、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 = e_{1jk} a_j b_k = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} e_{1jk} a_j b_k \tag{7}$$

を計算してみると良い。

Kronecker のデルタと交代記号の間には次の恒等式が成り立つ。

$$e_{ijk} e_{ipq} = \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp} \tag{8}$$

この恒等式は記憶する価値がある。なぜなら、この式さえ記憶していれば、ベクトル解析の種々の公式を導出できるからである。

例: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ を Einstein の総和規約と上の恒等式 (8) を用いて証明する。

$$\begin{aligned} \text{左辺の第 } i \text{ 成分} &= e_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k && (9) \\ &= e_{ijk} a_j e_{kpq} b_p c_q && (10) \\ &= e_{kij} e_{kpq} a_j b_p c_q && (11) \\ &= (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) a_j b_p c_q && (12) \\ &= a_j c_j b_i - a_j b_j c_i = \text{右辺の第 } i \text{ 成分} && (13) \end{aligned}$$

例: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (e_{ijk} a_j b_k)(e_{ipq} c_p d_q) && (14) \\ &= e_{ijk} e_{ipq} a_j b_k c_p d_q && (15) \\ &= (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) a_j b_k c_p d_q && (16) \\ &= a_j b_k c_j d_k - a_j b_k c_k d_j = \text{右辺} && (17) \end{aligned}$$

3　微分演算子 ∇

微分演算子 ∇ を、偏微分作用素 $\partial / \partial x_i$ を成分にもつベクトルと解釈することにしよう。ただし、∇ は演算子 (あるいは作用素) なので、作用する順序には注意する必要がある。例えば、$\nabla \cdot \mathbf{a}$ と $\mathbf{a} \cdot \nabla$ の表すものは異

なる (前者はスカラー、後者は微分作用素)。ここで、例えばスカラー関数 f の x_i $(i = 1, 2, 3)$ による偏微分を、以降

$$f_{,i} := \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{18}$$

と書くことにする。この時、勾配、発散、回転は以下のように書くことができる。

- スカラー値関数 f の勾配 (の第 i 成分)： $(\mathrm{grad} f)_i := (\nabla f)_i = f_{,i}$
- ベクトル値関数 $\mathbf{a}$ の発散： $\mathrm{div}\mathbf{a} := \nabla \cdot \mathbf{a} = a_{i,i}$
- ベクトル値関数 $\mathbf{a}$ の回転 (の第 i 成分)： $(\mathrm{rot}\mathbf{a})_i = (\mathrm{curl}\mathbf{a})_i := (\nabla \times \mathbf{a})_i = e_{ijk} a_{k,j}$

ここで、回転が $e_{ijk} a_{j,k}$ ではないことに注意しよう。k, j という順になることが分かりにくければ、$e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} a_k$ と書いてみると良いだろう。

勾配、発散、回転をこのように表記することで、やはり、ベクトル解析の公式を簡単に導出することができる。

例: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$ (ここに、∇^2 は Laplacian である)

$$\begin{aligned}
\text{左辺の第 } i \text{ 成分} &= e_{ijk} (\nabla \times \mathbf{a})_{k,j} && (19) \\
&= e_{ijk} (e_{kpq} a_{q,p})_{,j} && (20) \\
&= e_{kij} e_{kpq} a_{q,pj} && (21) \\
&= (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) a_{q,pj} && (22) \\
&= a_{j,ij} - a_{i,jj} && (23) \\
&= (a_{j,j})_{,i} - a_{i,jj} = \text{右辺の第 } i \text{ 成分} && (24)
\end{aligned}$$

ここで導入した添字記法、Einstein の総和規約を用いることで、力学や電磁気学の記述が簡単になり、計算の見通しが格段に良くなるので、ぜひ習得して欲しい。これらを用いてベクトル解析の教科書に載っている演習問題を片っ端から解いてみることをお薦めする。卒業研究を開始する研究室の四年生にはまずこれを習得してもらうが、だいたい 3 日から 1 週間も練習すれば使いこなせるようになるようである。

4　練習問題

以下の多くは C·R· ワイリー著 (富久泰明訳)『工業数学 (下)』からの引用である。

1. 恒等式 (8) が成り立つことを確認せよ。
2. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ はベクトルとする。
   (a) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ を示せ。
   (b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$ を示せ。
   (c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ をベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の線形結合で表わせ。
3. $\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ をベクトル値関数、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を t に依存しない定ベクトルとする。
   (a) $\mathbf{p}(t) = \mathbf{a} \cos kt + \mathbf{b} \sin kt$ のとき、$\mathbf{p} \times d\mathbf{p}/dt$、$d^2\mathbf{p}/dt^2 + k^2\mathbf{p}$ を計算せよ。ただし、$k \in \mathbb{R}$ は t に依存しない定数である。
   (b) $d(\mathbf{p} \times d\mathbf{p}/dt)/dt = \mathbf{p} \times d^2\mathbf{p}/dt^2$ を示せ。

(c) $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}/dt \times d^2\mathbf{p}/dt^2$ の t に関する微分を求めよ。

(d) $\mathbf{p} \times (d\mathbf{p}/dt \times d^2\mathbf{p}/dt^2)$ の t に関する微分を求めよ。

(e) $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}/dt = |\mathbf{p}|(d|\mathbf{p}|/dt)$ を示せ。

4. $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ をスカラー値関数、$\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をベクトル値関数とする。以下を示せ。

(a) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi$

(b) $\nabla \times (\phi \mathbf{v}) = \phi \nabla \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \nabla \phi$

(c) $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$

(d) $\nabla \times \nabla \phi = 0$

(e) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{v} = 0$

5. $\mathbf{r}$ を x_i を第 i 成分に持つベクトル、$r = |\mathbf{r}|$ をその長さとする。また、$\mathbf{a}$ を定ベクトルとする。

(a) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ を示せ。

(b) $\nabla \cdot \mathbf{r}$ を求めよ。

(c) $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ を計算せよ。

(d) $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r}$ を計算せよ。

(e) $(\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{r}$ を計算せよ。

(f) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}/r)$ を計算せよ。

(g) $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}/r)$ を計算せよ。